



UNIONE EUROPEA
Fondo Europeo di Sviluppo Regionale



CTN01_00176_163601



TRIM

Tecnologia e Ricerca Industriale per la Mobilità Marina

Studio sulla riduzione della resistenza d'avanzo di una carena mediante insufflazione di microbolle

Sotto-Progetto	Efficienza	
Obiettivo Realizzativo	CFD su flussi bifase e forma semplice insufflata	
Descrizione attività	Simulazioni numeriche mediante STAR -- CCM+	
Tipo di documento	Rapporto Tecnico	
Codice del documento	SP.4-OR.1-D.1	
Data di emissione	18/05/2022	
Redazione	Vittorio Bucci	





Titolo documento Studio sulla riduzione della resistenza d'avanzo di una carena mediante insufflazione di microbolle

Codice documento SP.4-OR.1-D.1

Distribuzione Pubblico

Rev.	Data	Pagine	Redazione	Responsabile
0	18/05/2022	2+26	Vittorio Bucci	Vittorio Bucci

L'attività descritta nella presente pubblicazione è stata finanziata dal Progetto TRIM — Tecnologia e Ricerca Industriale per la Mobilità Marina — coordinato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche e finanziato dal Ministero dell'Università e della Ricerca nell'ambito dell'iniziativa dei Cluster Tecnologici Nazionali.



Indice

Elenco delle figure	2
Elenco delle tabelle	3
Sommario	4
1 Introduzione	5
2 Tecniche di fluidodinamica computazionale	6
2.1 L'equazione di bilancio della massa	6
2.2 Le equazioni di bilancio della quantità di moto	7
2.3 Le equazioni di bilancio dell'energia	7
2.4 RANS	8
2.5 Condizioni di parete e struttura dello strato limite	10
2.6 Tecniche di discretizzazione del modello	11
2.7 Discretizzazione delle bolle	13
3 Simulazioni su lastra piana senza insufflazione di microbolle	15
3.1 Definizione della geometria	15
3.2 Definizione della griglia	16
3.3 Validazione risultati	18
3.4 Influenza del dominio	19
3.5 Risultati	19
4 Studi e progetti con carene lubrificate con micro bolle	21
4.1 Risultati	22
5 Conclusioni	25
Riferimenti bibliografici	26



Elenco delle figure

1	Andamento della velocità in flusso laminare (a) e turbolento (b).	9
2	La struttura dello strato limite.	10
3	Distribuzione della frazione di volume.	12
4	Definizione di Boundaries. Alle pareti trasparenti è assegnata la condizione di inlet.	16
5	Scena della mesh con piani di intersezione.	16
6	Dettaglio di una scena rappresentante i cinque prism layer.	17
7	Grafico dei residui relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s. . .	17
8	Grafico della resistenza al moto relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.	18
9	Scena riportante il numero di Courant relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.	18
10	Scena riportante il valore y^+ relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.	19
11	Confronto tra gli andamenti delle linee di attrito.	20
12	Dominio di calcolo delle simulazioni con modello euleriano multifase con lastra sul lato superiore.	21
13	Dominio di calcolo delle simulazioni con modello Euleriano e con lastra sul lato superiore.	21
14	Dominio di calcolo con lastra verticale.	22
15	(a) Resistenza d'attrito normalizzata, espressa in funzione della portata e delle velocità (b) confronto tra configurazione con lastra verticale (simboli pieni) e lastra on top (simboli vuoti).	23
16	Resistenza d'attrito normalizzata, espressa in funzione della portata e delle velocità addizionali considerate (lastra verticale).	23
17	Grafici della resistenza d'attrito normalizzata, in funzione della portata d'aria e della dimensione media delle particelle, per ogni velocità analizzata.	24



Elenco delle tabelle

1	Prova di rimorchio.	15
2	Confronto risultati.	19
3	Risultati della simulazione.	19



Sommario

Questo elaborato descrive sperimentazioni numeriche di fluidodinamica computazione utilizzate per simulare l'insufflazione di bolle sotto la chiglia di una nave. Data la difficoltà nel simulare il complesso scenario fisico bifase si sono svolte simulazioni su lastre piane con e senza insufflazione d'aria, realizzando diverse situazioni variando l'orientamento della lamina rispetto alla direzione di avanzamento. Verrà presentata anche una validazione dei risultati per verificare l'effettiva riduzione della resistenza viscosa all'avanzamento.

1 Introduzione

La fluidodinamica computazionale, comunemente conosciuta con l'acronimo CFD (Computational Fluid Dynamics), analizza e studia complessi fenomeni fisici, quali sistemi di flussi fluidi, scambi di calore e fenomeni ad essi associati, mediante simulazione numerica eseguita da calcolatori. Si ricorre dunque a sofisticati modelli matematici intesi a riprodurre il più fedelmente possibile i fenomeni fisici in esame, così da ottenere un andamento temporale aderente al vero dei parametri fisici fondamentali (campi di pressione, velocità, temperatura, etc.).

Le tecniche CFD, integrate nella progettazione aerospaziale sin dagli anni '60 sono oggi giorno parte fondamentale dell'iter di sviluppo progettuale in svariati campi d'applicazione industriale o meno. Il loro utilizzo consente di eliminare, o quantomeno ridurre significativamente, l'impiego di prototipi e, di conseguenza, l'entità delle spese. La CFD, rispetto alla convenzionale sperimentazione, può fornire una quantità di risultati estremamente elevata in brevissimi tempi. Nel settore navale si sta diffondendo sempre di più, favorita anche dall'incremento di potenza computazionale dei computers. La fluidodinamica computazionale si dimostra essere un valido strumento, soprattutto in fase preliminare e di ottimizzazione, ma comunque ancora non in grado di sostituire le vasche di sperimentazione. Qualsiasi codice numerico di CFD è caratterizzato da tre sezioni legate da una relazione gerarchica mediante la quale si definisce l'analisi da effettuare e i risultati che è necessario ottenere. Nella prima sezione detta Pre-Processor si gestiscono i parametri geometrici, le condizioni al contorno e la discretizzazione del problema. Nonostante il rapporto tra gli step sia di tipo gerarchico particolare attenzione va rivolta alla fase di discretizzazione poiché il grado di accuratezza della soluzione dipende strettamente da come avviene tale procedura. La seconda sezione è quella del Flow solver nella quale si gestiscono i modelli numerici per la soluzione delle equazioni di governo ed infine vi è la fase di Post Processor che consiste nell'elaborazione dei risultati ottenuti esprimendoli mediante un'interfaccia grafica al fine di renderne più semplice l'interpretazione.

Questo rapporto descrive le sperimentazioni numeriche utilizzate per simulare l'insufflazione di bolle sotto la chiglia di una nave per validare la riduzione della resistenza viscosa all'avanzamento. Il software utilizzato è STAR-CCM+. Data la difficoltà nel simulare il complesso scenario fisico bifase si sono svolte simulazioni su lastre piane con e senza insufflazione d'aria, realizzando diverse situazioni variando l'orientamento della lamina rispetto alla direzione di avanzamento.

2 Tecniche di fluidodinamica computazionale

Il comportamento dei fluidi è regolato dalle equazioni di Navier-Stokes [1], equazioni di bilancio che formalizzano matematicamente tre principi fisici: il principio di conservazione della massa, conservazione della quantità di moto e conservazione dell'energia. Tali relazioni si ottengono a partire dalla formulazione dei principi di conservazione di cui si chiede il soddisfacimento all'interno di un opportuno volume di controllo. Le leggi di bilancio o della conservazione prevedono che il flusso di una determinata grandezza si conservi all'interno del volume di controllo. Le equazioni di Navier-Stokes costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali la cui soluzione risulta dipendente dalle condizioni al contorno imposte nel dominio di analisi. Tali precisazioni sono fondamentali in quanto, come verrà descritto nei seguenti capitoli, volendo studiare un fenomeno fluidodinamico mediante analisi CFD occorre verificare che le condizioni al contorno imposte siano congruenti con il modello numerico adottato per la simulazione. Le equazioni di governo si ricavano utilizzando come strumento un opportuno volume di controllo.

2.1 L'equazione di bilancio della massa

Il principio di conservazione della massa di un fluido esprime il concetto che la massa di un sistema arbitrario in moto resta invariata nel tempo, pari alla differenza tra portata entrante ed uscente.

Per affrontare un problema così complesso è necessario procedere per passi successivi di complessità, adottando alcune semplificazioni, per poi introdurre una serie di coefficienti correttivi desunti dall'esperienza e che considerano diversi aspetti non ponderabili, quali la resistenza dell'aria e delle appendici di carena.

$$\frac{dM}{dt} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_u = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

dove M è la massa del filetto fluido e \dot{m}_e , \dot{m}_u rispettivamente la portata entrante e la portata uscente, V il volume del dominio in esame e ρ la sua densità. La differenza tra masse entranti ed uscenti può essere espressa come l'integrale di superficie della distribuzione di velocità sull'intera superficie A del dominio:

$$\sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_u = \int_A \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA,$$

dove \mathbf{n} rappresenta il vettore normale alla superficie, $\vec{u} = u(u, v, w)$ il vettore velocità e ρ la densità. Ricorrendo al teorema di Gauss-Green [2] che lega un integrale di superficie ad uno di volume, si può arrivare all'equazione di continuità in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

dove ∇ indica l'operatore divergenza. Il campo non necessariamente dev'essere uniforme, ma la densità dell'elemento fluido non deve variare nel tempo quando questo si muove nello spazio.

2.2 Le equazioni di bilancio della quantità di moto

L'equazione di bilancio della quantità di moto per un fluido in moto discende dalla legge di conservazione della quantità di moto per un sistema: la variazione nel tempo della quantità di moto è pari alla somma delle forze di massa e la somma delle forze di superficie.

$$M \frac{du}{dt} = \sum \dot{m}_e u_e - \sum \dot{m}_u u_u + F = \int_V \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV,$$

dove F rappresenta le forze esterne agenti sul generico volume di fluido V , comprendendo sia forze di massa che di superficie:

$$F = \int_V (\rho g - \nabla p + \nabla \cdot f) dV,$$

con g accelerazione di gravità, f tensore degli sforzi e p pressione sulla superficie. Considerando il teorema di Gauss-Green e volendo esprimere il tensore degli sforzi in funzione della viscosità e del campo di velocità secondo le leggi costitutive di Stokes ($f = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$), si arriva all'equazione della conservazione della quantità di moto in forma differenziale:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu[\nabla u + (\nabla u)^T] + \rho g.$$

2.3 Le equazioni di bilancio dell'energia

L'equazione di bilancio dell'energia esprime il primo principio della termodinamica con la differenza che la variazione di energia è riferita ad una variazione nel tempo, dunque il lavoro così come il calore, sono rispettivamente lavoro compiuto per unità di tempo e calore fornito per unità di tempo. Pertanto, la variazione nel tempo di energia contenuta nel volume di controllo è pari al flusso netto di calore uscente attraverso le superfici del volume di controllo sommato al lavoro compiuto per unità di tempo dalle forze volumetriche e superficiali agenti sul volume di controllo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \rho \vec{u} \cdot \nabla \left(e + \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p \vec{u}) + \rho \dot{q} + \rho (F \cdot \vec{u}),$$

dove e , \dot{q} rappresentano rispettivamente l'energia interna ed il flusso di calore valutati per unità di massa. Considerando rispettivamente le equazioni di continuità, bilancio della quantità di moto e bilancio di energia si ottengono le equazioni di Navier-Stokes. Queste costituiscono un sistema fortemente non lineare di equazioni differenziali alle derivate parziali per le quali non esiste una soluzione in forma chiusa, bensì una soluzione numerica ricavata applicando opportuni metodi matematici. Risulta dunque necessario introdurre alcune nozioni di fluidodinamica computazionale ed i relativi metodi numerici adottati per la determinazione di una soluzione approssimata. Per definire una simulazione di CFD, occorre introdurre i concetti alla base di una simulazione numerica descrivendo i modelli numerici che consentono la risoluzione di un problema fluidodinamico mediante codice di calcolo. Altresì risulta necessario esaminare vincoli e requisiti che necessariamente devono essere soddisfatti al fine di garantire

una corretta simulazione numerica concentrando l'attenzione sul problema preso in esame, ossia lo studio fluidodinamico dell'insufflazione di bolle su una lastra piana. Dunque le equazioni di Navier-Stokes devono essere risolte iterativamente in forma discreta, abbandonando la forma differenziale e discretizzando il volume di controllo in un numero finito di elementi. Anche se questo passaggio sembra essere semplice, all'atto pratico è necessario compiere delle scelte che porteranno il codice di calcolo ad essere adatto allo studio di certi fenomeni e del tutto inutilizzabile per altri. Il programma Star-CCM+ prevede l'adozione di due diversi metodi di soluzione delle equazioni di Navier-Stokes denominati metodo segregato e metodo accoppiato. Entrambi i metodi adottano la discretizzazione mediante volumi finiti e differiscono nella procedura adottata per la determinazione delle variabili di flusso incognite. Nel dettaglio, il metodo segregato prevede la soluzione delle equazioni di governo in sequenza, verificando, una volta risolta ciascuna equazione, che la convergenza numerica venga raggiunta. Il metodo accoppiato prevede, invece, una soluzione simultanea di tutte le equazioni comportando, pertanto, un maggiore onere computazionale richiesto per la risoluzione. La scelta della metodologia da adottare dipende strettamente dal problema fisico preso in esame e per le seguenti simulazioni è stato adottato il metodo segregato. Le tipologie di analisi CFD si differenziano anche in base alla tecnica adottata per la modellazione numerica della turbolenza. Si distinguono le simulazioni DNS (Direct Navier-Stokes Simulation) [3], le simulazioni LES (Large Eddies Simulation) [4] e le simulazioni RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) [5]. Le simulazioni DNS prevedono la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes senza introdurre alcun modello di turbolenza. Tali simulazioni richiedono l'adozione di una griglia di calcolo particolarmente fitta in modo da risolvere tutte le strutture turbolente all'interno del campo di moto. La problematica di questa tipologia di simulazioni risiede nell'elevato onere computazionale richiesto per la risoluzione del problema che risulta crescente con il numero di Reynolds. Per tale ragione le simulazioni DNS risultano inapplicabili per fenomenologie complesse come quella in esame. Per l'analisi della turbolenza si ricorre dunque ad opportune semplificazioni matematiche che permettono di modellare la turbolenza consentendo l'analisi dei fenomeni più complessi come ad esempio il distacco dello strato limite. Il principale metodo numerico impiegato per descrivere la dinamica di un regime di moto turbolento consiste nell'applicazione del metodo della decomposizione di Reynolds alle equazioni di Navier-Stokes.

2.4 RANS

L'approccio della simulazione diretta è improponibile per problemi ingegneristici di interesse pratico, si può cercare una soluzione che caratterizzi la corrente mediata su un certo intervallo di tempo. Questo approccio detto RANS si basa sull'ipotesi che la turbolenza sia un fenomeno statistico e cerca di descrivere l'evoluzione del moto attraverso un processo di media temporale. In un flusso turbolento, a differenza di quanto accade in uno di tipo laminare, gli strati del fluido presentano evidenti miscelazioni e l'andamento temporale della velocità (e, di conseguenza, della pressione) risulta irregolare, con fluttuazioni ad alta frequenza attorno ad un valore medio; per questo

motivo si è soliti scomporre la velocità u e la pressione p come segue:

$$u = u^0 + \bar{u}$$

$$p = p^0 + \bar{p},$$

dove i termini soprallineati indicano il valore medio noto e quelli con apice il termine fluttuante incognito. Questa fluttuazione è responsabile del trasporto di quantità di moto tra strati di fluido adiacenti, un'ulteriore complicanza del problema comportando che il flusso vicino a parete sia più veloce nel caso turbolento rispetto al caso di flusso laminare.

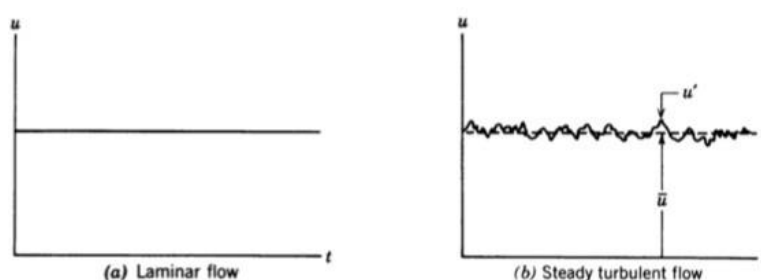


Figura 1: Andamento della velocità in flusso laminare (a) e turbolento (b).

Se si provasse a risolvere per via diretta le equazioni di Navier-Stokes in presenza di fenomeni turbolenti, si riscontrerebbe la necessità di implementare una griglia estremamente fitta comportando uno sforzo computazionale oneroso. Per ovviare si introduce nelle Navier-Stokes il tensore degli sforzi di Reynolds. Queste tensioni non sono tensioni reali sperimentate, ma sono tensioni fittizie che rappresentano l'influenza delle velocità fluttuanti sulle velocità medie indicando l'energia che si perde nel flusso medio e trasferita nelle fluttuazioni nell'intervallo di tempo. Sostituendo nelle Navier-Stokes i termini mediati delle velocità e delle pressioni si ottengono le RANS:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j},$$

dove con i pedici i, j indicano le componenti delle velocità e le direzioni principali x, y, z e τ_{ij} il tensore degli sforzi di Reynolds. Le equazioni RANS non possono essere risolte nella forma sopra riportata in quanto il numero di incognite risulta maggiore del numero di equazioni disponibili conducendo dunque al cosiddetto problema della chiusura degli sforzi di Reynolds. Sono presenti diversi metodi per ottenere la chiusura delle equazioni RANS che variano sia per complessità che per la necessità di potenza di calcolo. Risulta opportuno precisare che tali equazioni non consentono di ricavare informazioni dettagliate sulle strutture del flusso turbolento bensì una stima dei valori medi come velocità, pressioni e livelli di intensità di turbolenza, che possono poi essere usati per scopi di progettazione. La capacità di queste equazioni di produrre informazioni accurate sui parametri medi dipende direttamente dalla qualità dei modelli usati per approssimare i termini incogniti. Generalmente, l'approccio privilegiato nella modellazione del tensore di Reynolds consiste nell'introduzione dell'approssimazione

di Boussinesq. Tale approssimazione consiste nel considerare le componenti del tensore degli sforzi di Reynolds come componenti fluttuanti. Questo procedimento risulta possibile mediante l'introduzione della viscosità turbolenta ν_t che è definita a partire dalla relazione seguente:

$$-\bar{u}_i \bar{u}_j = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}.$$

In tale relazione il termine δ_{ij} rappresenta la delta di Kronecker che esprime la funzione di due variabili discrete e assume valore nullo se le variabili non coincidono viceversa assume valore unitario. Il termine k invece rappresenta l'energia cinetica turbolenta definita come:

$$k = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_j.$$

Per risolvere le equazioni RANS è necessario definire un preciso modello numerico che esprime il legame che si interpone tra il fluido e la viscosità turbolenta che lo caratterizza. Esistono molteplici modelli di turbolenza che esprimono tale legame, quali ad esempio i modelli ad un'equazione, a due equazioni o del secondo ordine.

Queste classificazioni si riferiscono al livello di sofisticazione matematica usato per derivare il modello, e anche al livello di costo computazionale per il solutore CFD.

2.5 Condizioni di parete e struttura dello strato limite

Lo strato limite rappresenta quella regione di flusso in prossimità della parete di un corpo entro il quale non è possibile trascurare l'azione delle forze viscosse. Inoltre, nella maggior parte dei problemi fluidodinamici, le pareti del corpo generano vorticità per cui risulta essenziale una previsione accurata del flusso e dei parametri che governano la turbolenza. Da queste considerazioni si deduce la necessità di analizzare lo strato limite dettagliatamente identificandone le regioni che lo caratterizzano e i requisiti da soddisfare per garantire una corretta modellazione numerica. A tale scopo è illustrata di seguito una schematizzazione dello strato limite che si presenta in prossimità di una lastra piana investita da una corrente fluida a che si muove a velocità indisturbata U_∞ .

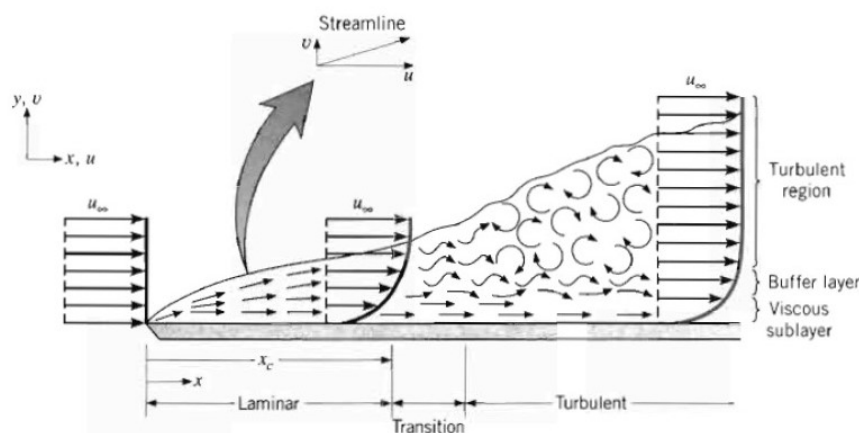


Figura 2: La struttura dello strato limite.

Lungo l'ascissa x si identificano le zone caratterizzate rispettivamente dal regime di moto laminare, regime di transizione localizzato in prossimità dell'ascissa di transizione x_c ed infine il regime turbolento. Considerando l'ordinata y è possibile definire quattro zone caratteristiche dello strato limite ciascuna delle quali governata da diversi fenomeni fisici. La prima regione è nota come sottostrato viscoso e rappresenta la zona prossima alla parete entro la quale i flussi di quantità di moto associati all'agitazione molecolare (sforzi viscosi) dominano sui flussi di quantità di moto associati alle fluttuazioni turbolente (sforzi di Reynolds). All'interno dello sottostrato viscoso il flusso si mantiene prevalentemente laminare e la velocità media dipende unicamente dalle proprietà del flusso quali densità e viscosità, dalla distanza dalla parete e dagli sforzi di attrito. Successivamente si identifica la regione del buffer layer, anche nota come strato tampone, all'interno del quale le linee di flusso incominciano a distorcersi per effetto della viscosità del fluido e gli sforzi viscosi assumono la stessa importanza degli sforzi di Reynolds. Terminato il buffer layer si presenta la regione di flusso turbolento denominata regione logaritmica all'interno della quale gli sforzi viscosi risultano trascurabili mentre gli sforzi di Reynolds si mantengono all'incirca costanti. Infine si identifica la regione esterna dello strato limite al cui interno la turbolenza assume un carattere intermittente. Ciascuna delle regioni caratteristiche dello strato limite è caratterizzata da un determinato spessore che viene espresso definendo una variabile di parete adimensionale nota come y^+ . Si tratta di una distanza adimensionale che assume fondamentale importanza durante la fase di discretizzazione poiché permette di determinare, mediante un opportuno procedimento, la corretta dimensione da imporre alla griglia di calcolo in prossimità della parete. La relazione matematica che esprime la quantità y^+ è riportata di seguito:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu},$$

dove y è la distanza dalla parete, ν la viscosità cinematica e u_τ la velocità di attrito definita in funzione dello sforzo di taglio τ_w agente sulla parete:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

2.6 Tecniche di discretizzazione del modello

Lo studio fluidodinamico della lastra piana con e senza insufflazione di bolle ricorre all'analisi numerica di una corrente fluida bifasica, ovvero caratterizzata dalla presenza di due diversi fluidi, dove risulta necessario adottare un modello numerico in grado di riprodurre l'interfaccia che si presenta tra le diverse fasi. Tale modello, noto come Volume Of Fluid (VOF), consente di determinare l'interfaccia tra le fasi a partire dalla soluzione dell'equazione di continuità per ciascuna delle fasi considerate. Suddetto modello considera n (due o più) fluidi/fasi non miscibili fra loro, risolvendo un singolo insieme di equazioni di conservazione della quantità di moto e, successivamente, calcolando la frazione di volume di ognuno dei fluidi all'interno del dominio discretizzato. La somma delle frazioni di volume di tutte le fasi deve essere pari al valore unitario in

ogni punto del dominio; detta v_i la frazione di volume dell' i -esima fase si avrà:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1, \quad v_i \in [0, 1] \forall i,$$

dove n rappresenta il numero di fasi presenti nel dominio, generalmente pari a due (acqua e aria) per problemi di tipo navale. Allora, in riferimento all' i -esimo fluido, in ogni cella saranno possibili tre differenti condizioni: $v_i = 0$, l' i -esimo fluido non è presente nella cella; $v_i = 1$, l' i -esimo fluido è l'unico presente all'interno della cella; $v_i \in]0, 1[$, nella cella si ha una miscelazione di fluidi.

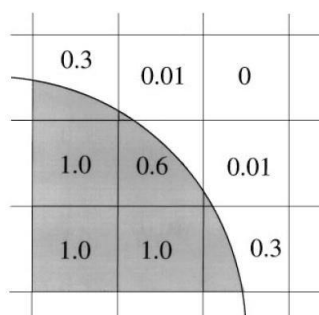


Figura 3: Distribuzione della frazione di volume.

Per ottenere le soluzioni delle equazioni del moto, così come per le equazioni che descrivono la turbolenza, è necessario semplificare il problema mediante approssimazioni ricorrendo dunque ad una discretizzazione delle equazioni. La discretizzazione rappresenta il procedimento mediante il quale viene effettuata la trasformazione di un sistema continuo in una controparte discreta. Esistono diverse tecniche di discretizzazione ciascuna delle quali si basa sull'applicazione di metodi numerici differenti. Si ricordano tra questi il metodo di discretizzazione mediante differenze finite oppure il metodo dei volumi finiti. Ciascuno di questi metodi prevede l'adozione di funzioni semplificate per approssimare le variabili incognite del flusso e la discretizzazione delle equazioni di governo mediante opportuna modellazione matematica. Il risultato di tali operazioni consente di determinare un sistema di equazioni algebriche che è possibile risolvere mediante l'ausilio di opportuni calcolatori. Il metodo delle differenze finite si basa sull'approssimazione delle derivate mediante troncamento di sviluppi in serie di Taylor espressi in termini dei valori in un dato nodo della griglia di calcolo e nei nodi ad esso adiacenti. Sostituendo tali approssimazioni discrete al posto delle derivate continue nelle equazioni di governo si ottiene un sistema di equazioni algebriche che consente di determinare, in tutti i punti della griglia di calcolo, le variabili di flusso. Questa tecnica rappresenta uno dei primi metodi adottati per la soluzione dei problemi di fluidodinamica tuttavia risulta fortemente influenzato dalla struttura della griglia di calcolo.

Il metodo dei volumi finiti è stato originariamente sviluppato per superare alcune restrizioni che caratterizzano le formulazioni alle differenze finite e da allora si è evoluto fino a diventare un metodo ben consolidato e accuratamente convalidato per i problemi di CFD. La procedura prevede l'integrazione delle equazioni di governo su tutte

le celle del dominio di calcolo. Per ciascun volume di controllo si definisce un punto discreto, generalmente il centro cella, nel quale le variabili dipendenti come la velocità, pressione e temperatura devono essere calcolate. Il risultato di tale operazione è un sistema di equazioni algebriche che rappresenta la conservazione delle variabili di flusso per ogni volume di controllo. La risoluzione del sistema algebrico viene condotta mediante l'adozione di opportuni metodi iterativi. A differenza del metodo alle differenze finite, il metodo ai volumi finiti consente di adottare una griglia di calcolo arbitraria composta da celle di forma generica. Questa caratteristica conferisce al metodo ai volumi finiti una forte flessibilità dal punto di vista delle applicazioni in quanto non sempre è possibile generare una griglia di calcolo strutturata. Inoltre, poiché le leggi di conservazione sono discretizzate direttamente, le quantità fondamentali di massa, quantità di moto ed energia rimangono conservate a livello discreto. Il metodo di discretizzazione impiegato nelle analisi CFD è quello dei volumi finiti poiché è il metodo che meglio si presta all'integrazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Questo metodo consiste nella suddivisione del dominio di calcolo in un numero finito di sotto-volumi o celle caratterizzate da opportune condizioni al contorno. La fase di discretizzazione rappresenta il fulcro della simulazione numerica poiché in base al numero di elementi scelto si determina l'accuratezza della soluzione ed il tempo di calcolo necessario per ottenerla. Per tale ragione la fase preliminare di un'indagine mediante analisi CFD prevede uno studio di convergenza della griglia di calcolo al fine di identificare la mesh in grado di garantire il migliore compromesso tra onere computazionale richiesto e accuratezza della soluzione. La particolarità del metodo di discretizzazione ai volumi finiti risiede nel fatto che il metodo risulta conservativo.

Lo studio fluidodinamico è stato realizzato mediante analisi numeriche time-dependent adottando uno schema di risoluzione esplicito. Pertanto, al fine di garantire la corretta convergenza numerica della soluzione ed evitare problemi di stabilità della soluzione, occorre soddisfare un vincolo in merito alla discretizzazione temporale. Tale vincolo è determinato dalla condizione CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) [6] la quale prevede che il passo temporale Δt adottato per la discretizzazione temporale debba soddisfare la seguente relazione:

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t}{t_c} = \frac{\Delta t L}{u} < C_{\max},$$

dove Δt è il time step, t_c il tempo caratteristico di cella ottenuto come rapporto tra la dimensione della cella L e la velocità del flusso u e C_{\max} numero massimo di solito pari a 10. La condizione CFL imponga dei limiti dal punto di vista della scelta del passo temporale da adottare per la simulazione. Ciononostante, nel caso di simulazioni numeriche time-dependent, sebbene il passo temporale Δt soddisfi la condizione CFL, il raggiungimento di una soluzione stazionaria dipende strettamente dal fenomeno fisico preso in esame.

2.7 Discretizzazione delle bolle

Implementare le bolle non è risultato così immediato. Si ricorre comunque ad un sistema multifase differente con fasi disperse all'interno della fase continua, ovvero

l'acqua. Nel caso in esame si tratteranno bolle dalla ridotta dimensione in modo tale da poter semplificare il calcolo e assumere delle ipotesi risolutive.

Si impone che il diametro della bolla sia inferiore al millimetro sino a raggiungere valori dell'ordine della decina di micron. In tale condizioni, la bolla può essere considerata indeformabile, mantenendo forma sferica e volume. Ne deriva che è possibile assumere un valore costante per la sua densità. Una simile assunzione risulta plausibile poiché alle bolle molto piccole corrisponde un forte effetto della tensione superficiale che tende essenzialmente a fargli mantenere una forma sferica (il numero di Weber appare molto basso). In acqua, specialmente se di mare, le piccole bolle tendono rapidamente ad aggregarsi con le contaminazioni superficiali (teoria della bolla sporca: in acqua non purificata l'interfaccia gas-liquido tende a solidificare in presenza di impurità).

La micro-bolla risponde in prima approssimazione come un corpo rigido, ragion per cui può essere modellata come una particella solida [7, 8].

La generazione di bolle, ottenuta di norma mediante iniettori d'aria o piastre porose, mal si presta al controllo dimensionale delle sacche gassose prodotte; ciò comporta che il raggio della bolla sia caratterizzato da una densità di probabilità, rilevabile mediante misurazioni fotografiche [9]. Per semplicità, nelle simulazioni il più delle volte si tende a trascurare la pdf ed assumere un valore costante.

Un'ulteriore semplificazione può essere desunta dal confronto tra le caratteristiche fondamentali dei fluidi coinvolti nel fenomeno. La densità dell'aria è pressoché tre ordini di grandezza inferiore a quella dell'acqua e ciò consente di ammettere l'ipotesi di massless particle, ossia di trascurare la massa delle bolle d'aria. Infine, nella simulazione si è considerato la collisione elastica con le pareti trascurando le interazioni e urti tra le bolle stesse.

Per simulare l'introduzione delle bolle nel sistema ci si è rifatti al modello multifase Euleriano (EMP) e Lagrangiano (LMP). Il metodo euleriano risolve le equazioni di conservazione di massa e momento per ognuna delle fasi ricorrendo a modelli di interazione per definire l'influenza che una fase ha sull'altra mediante l'area di interfaccia frapposta. Il metodo lagrangiano risolve l'equazione di moto per delle particelle rappresentative della fase dispersa, man mano che queste attraversano il dominio; è inteso per sistemi che prevedano principalmente la presenza di una fase continua ed un volume relativamente ridotto di particelle discrete al suo interno, siano esse gocce di liquido, bolle gassose, particelle solide o particelle virtuali senza massa. Il LMP si addice a quei sistemi in cui è l'interazione delle particelle con la fase continua a dominare i moti della fase discreta (non l'interazione tra le particelle stesse) ed in cui l'interazione con le pareti fisiche è importante. Ogni particella, in realtà, descrive un gruppo localizzato di fase dispersa avente le stesse proprietà e non una particella fisica. In questo modello, le particelle rappresentano una discretizzazione della popolazione della fase dispersa, allo stesso modo in cui le celle rappresentano una discretizzazione dello spazio continuo; come per le celle, il numero di particelle non è arbitrario e dev'essere abbastanza elevato da esprimere le proprietà dell'intera popolazione della fase dispersa.

3 Simulazioni su lastra piana senza insufflazione di microbolle

La lastra in esame è una comunissima lastra piana metallica in utilizzo alle vasche navali; presenta una lunghezza di 2.5 m ed uno spessore di 3 mm. Per le prove di rimorchio, condotte presso la vasca navale dell'Università degli Studi di Trieste, è stata assunta un'immersione pari a 384 mm e un range di velocità tra circa 1.0 m/s e 5.5 m/s.

I risultati sperimentali relativi alle prove di traino sono riportati nella Tabella 1.

Tabella 1: Prova di rimorchio.

Risultati sperimentali			
V	Drag	V	Drag
[m/s]	[N]	[m/s]	[N]
1.03	0.89	3.51	33.06
1.53	4.19	3.96	41.27
2.03	11.12	4.45	51.54
2.51	17.90	4.95	63.38
3.00	24.98	5.44	75.90

Per poter fare una previsione si rende necessario riprodurre numericamente i risultati ottenuti dalle prove sperimentali della lastra in assenza di bolle.

3.1 Definizione della geometria

Si è provveduto a ricreare la geometria della lastra mediante il modellatore 3D Rhinoceros. Nel farlo si è avuta l'accortezza di rendere il bordo d'ingresso più aguzzo, per evitare strani fenomeni di instabilità. Nell'impostare la geometria della simulazione si è deciso di sfruttare la natura simmetrica del problema, al fine di avere un risparmio dal punto di vista computazionale, considerando sola mezza lastra, imponendo un piano di simmetria in corrispondenza del piano diametrale di questa. Le dimensioni del dominio, decisamente cautelative, sono state determinate in base ad indicazioni di carattere generico, derivanti dall'esperienza¹ e successivamente validate. Queste non contribuiscono in modo evidente alla crescita del numero di celle poiché le zone più distanti dall'oggetto indagato presentano celle più grandi e quindi poco numerose. Le condizioni al contorno sono state definite come segue: è stata imposta la condizione di parete fisica (wall) solo all'oggetto lastra, la condizione di pressure outlet alla faccia

¹In simulazioni di natura navale è buona norma rispettare le seguenti indicazioni, espresse in funzione della lunghezza L di carena: 1L a prora, 3L a poppa, 2L ad ogni lato, 2L inferiormente. Il semi-dominio standard presenta dunque una lunghezza di 13.0 m, una larghezza di 5.5 m ed un'altezza di 7.0 m.

del dominio a poppavia della lastra, di symmetry al piano che la seziona ed infine di velocity inlet alle restanti quattro facce, come riassunto dalla Figura 4.

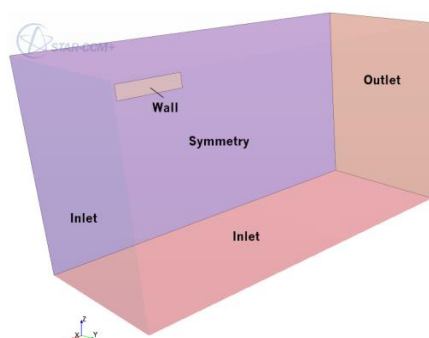


Figura 4: Definizione di Boundaries. Alle pareti trasparenti è assegnata la condizione di inlet.

3.2 Definizione della griglia

Per quanto concerne l'impostazione della mesh di volume, la scelta è ricaduta su una griglia trimmata (celle esaedriche), di largo impiego nel settore navale in quanto fornisce soluzioni accurate e robuste. Si è fatto ricorso anche all'utilizzo di tre volumi di controllo: un parallelepipedo dall'altezza molto limitata in corrispondenza dell'intera superficie libera, uno a base trapezoidale per meglio modellare la scia, ed infine un altro parallelepipedo dalle dimensioni ridotte, contenente la lastra (Figura 5).

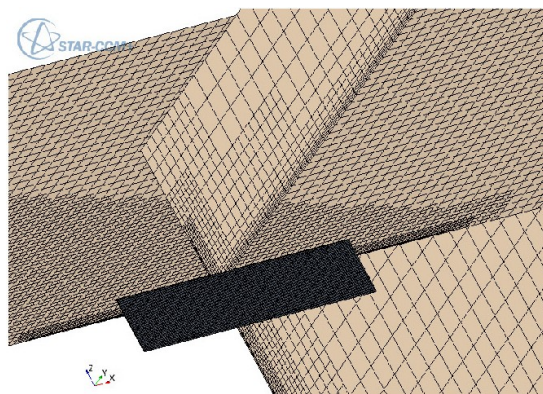


Figura 5: Scena della mesh con piani di intersezione.

Per modellare lo strato limite si è ricorsi all'opzione prism layers, imponendo l'utilizzo di cinque strati ed un fattore di accrescimento tale da coprire l'intera zona in cui il gradiente di velocità risulta influenzato dalla presenza della parete fisica, visibile in Figura 6, nella pagina seguente. La figura mostra la simulazione con velocità di 4 m/s dove in grigio è rappresentata la lastra piana, in rosso la velocità del flusso indisturbato e in blu la velocità risulta nulla.

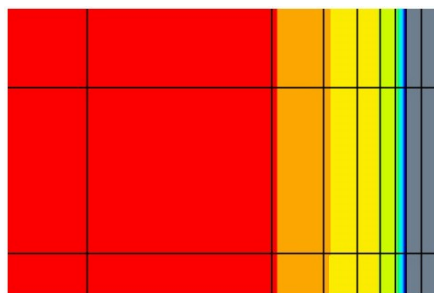


Figura 6: Dettaglio di una scena rappresentante i cinque prism layer.

Onde evitare che le pareti generassero riflessioni delle onde prodotte dal moto relativo tra fluido e lastra, si è abilitata una condizione di smorzamento (damping) sul bordo di uscita, impostandola ad un valore costante di 3.0 m. Per simulare il moto d'avanzo si è mantenuta immobile la lastra e sono state impostate le velocità della corrente e del vento (tra loro uguali) con direzione opposta a quella del moto d'avanzo. Si noti che considerare alternativamente il fluido in quiete e la lastra in movimento avrebbe prodotto risultati del tutto equivalenti. Oltre a non avanzare la lastra non poteva compiere alcun movimento, questo aspetto, derivante da evidenti considerazioni sulla condizione della lastra in fase di traino, consente di ridurre notevolmente il carico computazionale ed i tempi necessari alla simulazione. Prima di avviare la simulazione è stato impostato il time step pari a 0.02s in funzione delle grandezze delle celle come dall'equazione del CLF. Per evitare di appesantire il calcolo si è impostato il numero massimo di iterazioni (Maximum Inner Iterations) al tempo t del tempo fisico (Maximum Physical Time) pari a 5. Il tempo fisico (10 s) della simulazione è ridotto notevolmente dalla mancanza di gradi di libertà della lastra, evitando in fase iniziale lunghi transitori in cui le grandezze tendono ad oscillare in maniera significativa prima di stabilizzarsi. Per il controllo della convergenza è stato utilizzato il diagramma dei residui (Figura 7) e gli andamenti delle grandezze ingegneristiche come, ad esempio, la forza di drag (Figura 8 nella pagina seguente).

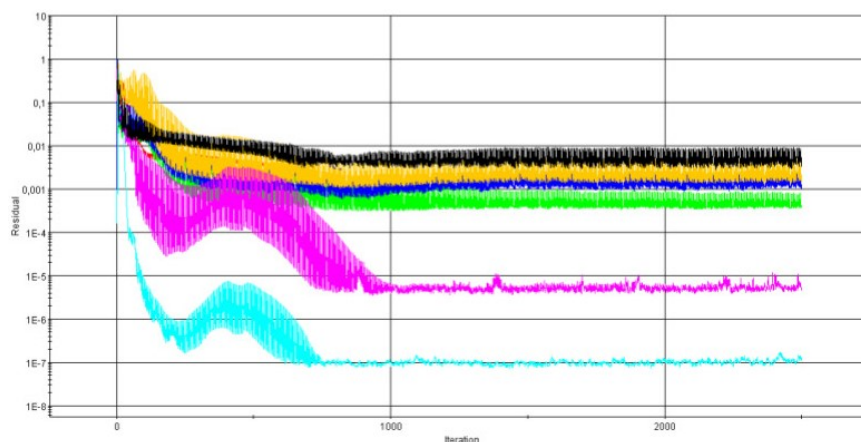


Figura 7: Grafico dei residui relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.

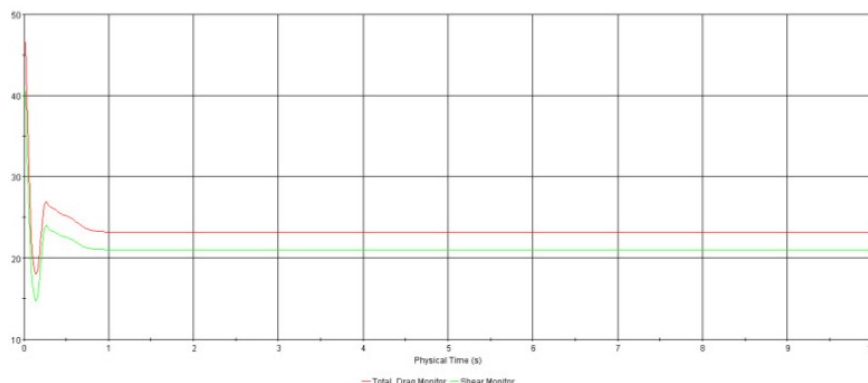


Figura 8: Grafico della resistenza al moto relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.

3.3 Validazione risultati

Effettuata la simulazione si rende necessario validarla. I primi elementi con cui farlo vengono forniti direttamente come output grafico da STAR-CCM+: ci si riferisce al numero di Courant, al valore y^+ ed ovviamente alla convergenza dei valori (non solo dei residui, ma di tutte quelle grandezze che dovrebbero avere un valore stazionario). Affinché una simulazione venga giudicata positivamente, il numero di Courant dev'essere ampiamente inferiore al valore 10; è norma comune accettare per i soli bordi d'ingresso e di uscita valori più elevati.

Si ritengono i risultati più che accettabili in quanto la Figura 9 mostra come solo alle estremità ci siano valori tendenti al numero di Courant massimo. Per quanto riguarda i valori di y^+ , questi devono essere compresi in un determinato range tra 50 e 150, dipendente dal modello utilizzato per simulare gli effetti a parete. I risultati raffigurati in Figura 10, nella pagina seguente, mostrano come i valori dell'altezza dello strato limite risultino essere nel range considerato.

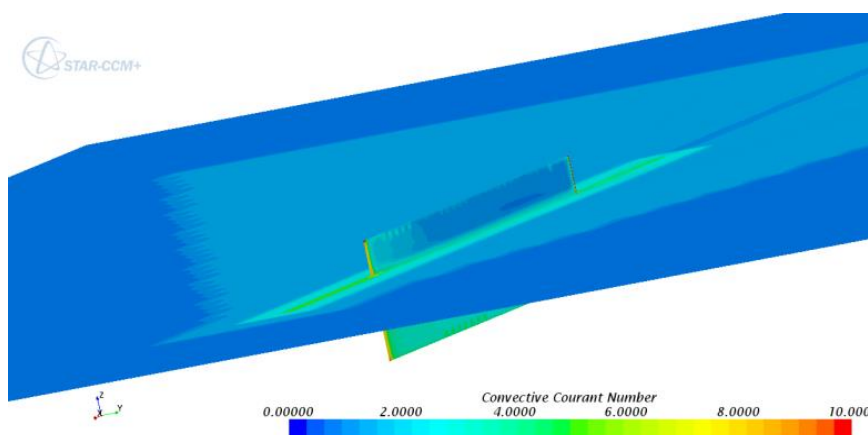


Figura 9: Scena riportante il numero di Courant relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.

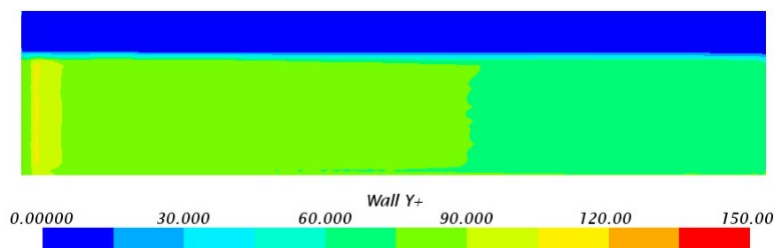


Figura 10: Scena riportante il valore y^+ relativo alla simulazione con velocità $V = 4.0$ m/s.

3.4 Influenza del dominio

Per valutare l'eventuale influenza dell'estensione del dominio sui risultati ottenuti si rende necessario eseguire una simulazione di accertamento. Tale verifica prevede un allargamento del dominio. Rispetto al caso standard, a parità di tutte le altre caratteristiche, si è assunto un semi-dominio avente dimensioni $25.0\text{ m} \times 10.0\text{ m} \times 12.0\text{ m}$. Con il ridimensionamento le celle si mantengono egualmente fitte. Valutando l'output relativo alla forza di resistenza rilevata, mostrato in Tabella 2, si può affermare che il dominio assunto per il caso standard non influenza i risultati, come sperato.

Tabella 2: Confronto risultati.

Influenza del dominio	
Dimensioni [m]	Drag [N]
$13.0 \times 5.5 \times 7.0$	46.30
$25.0 \times 10.0 \times 12.0$	46.30

3.5 Risultati

I valori della resistenza al moto ottenuti dalla simulazione numerica (Tabella 3) sono stati confrontati con la curva sperimentale e le curve fornite dall'ITTC'57 e ATTC'47.

Tabella 3: Risultati della simulazione.

Risultati analisi			
V [m/s]	Drag [N]	V [m/s]	Drag [N]
1.00	3.39	3.50	36.00
1.50	7.26	4.00	46.30
2.00	12.64	4.50	57.86
2.50	19.15	5.00	70.62
3.00	26.95	5.50	84.59

Gli andamenti delle curve, mostrati in Figura 11, appaiono coerenti.

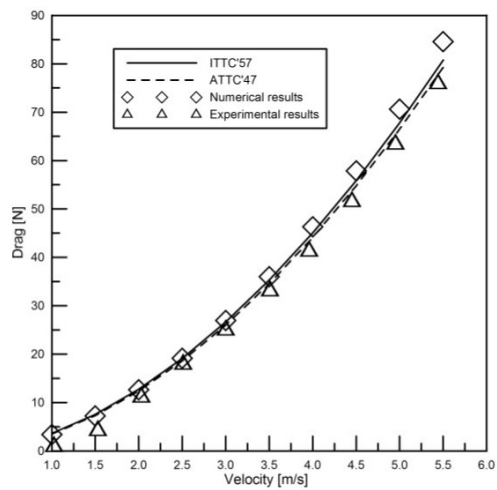


Figura 11: Confronto tra gli andamenti delle linee di attrito.

4 Studi e progetti con carene lubrificate con micro bolle

La simulazione del fenomeno della riduzione della resistenza con insufflazione di microbolle ha richiesto diversi tentativi. Si è ricorso ad una configurazione alternativa rispetto al caso precedente a causa dell'incompatibilità tra il modello necessario a simulare la superficie libera e il modello multifase euleriano utilizzato. Il primo sistema analizzato prevedeva la lastra piana, sezionata al galleggiamento e con orientazione orizzontale, un semi-dominio molto esteso ($13.0\text{ m} \times 5.5\text{ m} \times 7.0\text{ m}$) ed un iniettore avente una traccia rettangolare, largo 1.5 cm e posto a 2.5 cm dal bordo d'ingresso della lastra. A seguito di ripetute prove che hanno messo in luce le scarse prestazioni (relativamente al rapporto risultati/tempo di computazione) e, soprattutto, l'apparente incapacità del modello di valutare le componenti delle forze agenti sulle pareti, si è deciso di abbandonarlo e provare vie alternative.

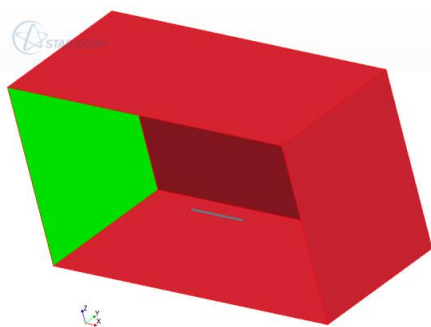


Figura 12: Dominio di calcolo delle simulazioni con modello euleriano multifase con lastra sul lato superiore.

Il secondo sistema analizzato prevedeva un dominio tridimensionale realizzato estraendo un dominio prismatico a facce rettangolari con la lastra sul lato superiore.



Figura 13: Dominio di calcolo delle simulazioni con modello Euleriano e con lastra sul lato superiore.

Per permettere la miscelatura dei fluidi sono stati introdotti numerosi iniettori circolari di piccole dimensioni lungo il bordo di ingresso della lastra. Il dominio assunto intorno alla lastra ha le seguenti dimensioni: $3.000\text{ m} \times 0.384\text{ m} \times 1.500\text{ m}$. Effettuando

prove preliminari è stato verificato che le dimensioni del dominio non influissero sulle soluzioni; attraverso corse senza iniezione d'aria si è ottenuto il valore di riferimento della resistenza.

Rifacendosi agli esperimenti di Madavan [10, 11] è stata realizzata una simulazione modificando l'orientamento della lastra, ponendola in configurazione verticale per evitare l'accumulo d'aria al di sotto della parte terminale della superficie.



Figura 14: Dominio di calcolo con lastra verticale.

4.1 Risultati

L'implementazione del modello Euleriano multi-fase, relativamente all'entità di riduzione di resistenza d'attrito raggiungibile, fornisce risultati abbastanza coerenti con quanto ritrovato in letteratura. La configurazione con lastra posta sul limite superiore del dominio non si presenta molto adatto a simulare gli andamenti delle bolle in modo aderente a quanto rilevato sperimentalmente.

L'interazione tra le bolle ed il gradiente di velocità del flusso all'interno dello strato di contorno, da quanto osservato, dovrebbe condurre all'estromissione delle bolle dalla zona adiacente alla parete durante il progressivo allontanamento dalla sezione d'iniezione.

In seguito alla valutazione dell'andamento della frazione di volume, si constata che, nelle simulazioni, questa tendenza non è presente; al contrario, la frazione di bolle tende ad aumentare.

Ciò può essere imputabile ad una formazione di clusters di bolle che, caratterizzate da una componente di velocità d'avanzo inferiore a quella del flusso e schiacciate verso la parete dall'azione della spinta, tendono progressivamente ad accumularsi.

Un comportamento simile denota il carattere preponderante dell'effetto della gravità sul fenomeno. Per evitare che si verificasse l'accumulo di bolle sulla zona terminale della lastra si è rivolta l'attenzione alla configurazione verticale, sulla quale sono state condotte analisi più estese.

Nella Figura 15, a pagina seguente, sono riportate le risposte con lo stesso setup utilizzato ma diversa orientazione della lastra. Si può notare come l'effetto della riduzione della resistenza al moto avvenga per la configurazione con lastra verticale; è risultato inaspettato l'incremento di resistenza ottenuto alla più bassa velocità di prova (1.5 m/s); per la velocità di 2.5 m/s si ha un valore di resistenza pressoché costante, prossimo a quello indisturbato; per le due velocità più elevate, si iniziano viceversa ad

apprezzare gli effetti benefici dell'insufflazione di bolle. Rispetto alle prove sperimentali descritte in letteratura si evidenzia una tendenza opposta: a parità di portata d'aria, all'aumentare della velocità del flusso la DR aumenta anziché scemare. Per indagare più la questione si sono condotte delle ulteriori prove, considerando delle velocità addizionali (7.5 m/s, 10.0 m/s e 15.0 m/s).

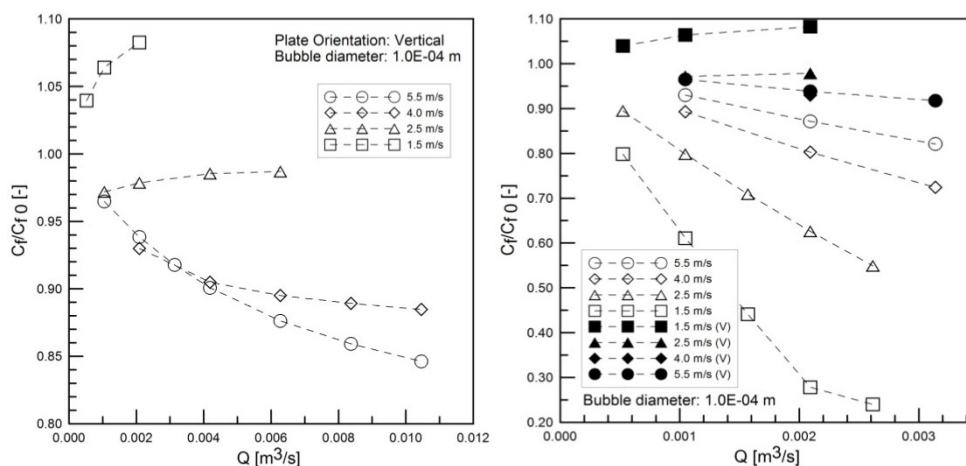


Figura 15: (a) Resistenza d'attrito normalizzata, espressa in funzione della portata e delle velocità (b) confronto tra configurazione con lastra verticale (simboli pieni) e lastra on top (simboli vuoti).

La Figura 16 mostra come le curve di iso-velocità a partire da 5.5 m/s assumono andamento tradizionale ovvero all'aumentare della velocità la resistenza diminuisce. Si è brevemente indagato anche sugli eventuali effetti dovuti alle dimensioni delle microbolle, ad ogni modo sempre assunte piccole. Sono state effettuate simulazioni ad ogni velocità per tre differenti dimensioni di riferimento: 1 mm, 100 μm e 10 μm .

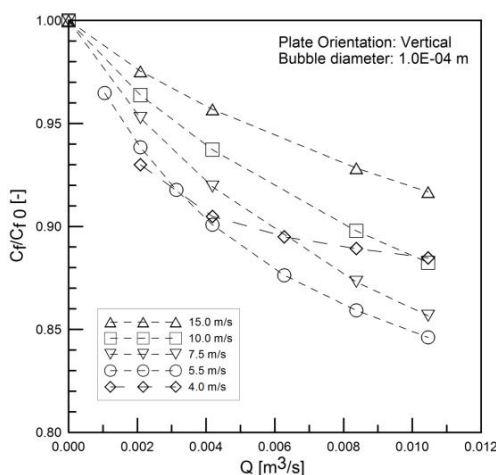
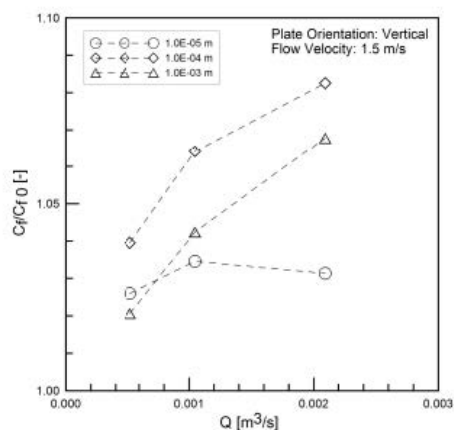
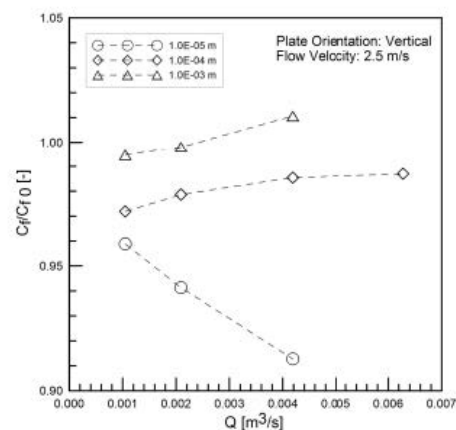


Figura 16: Resistenza d'attrito normalizzata, espressa in funzione della portata e delle velocità addizionali considerate (lastra verticale).

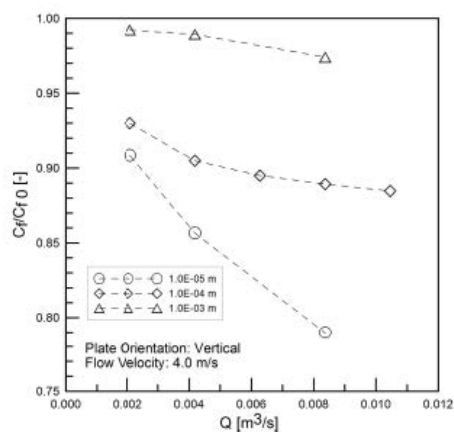
La tendenza generale associa al diminuire delle dimensioni della bolla un aumento di resistenza al moto. Unica anomalia appare essere ancora una volta quella relativa alla velocità di 1.5 m/s. Nel grafico riportato in Figura 17(a) si ha infatti che la resistenza per bolle da 100 μm è superiore a quelle aventi diametro di 1 mm. Nessuno dei tre casi conduce effettivamente ad una diminuzione di resistenza e per tale motivo sarebbe più corretto parlare di minor incremento.



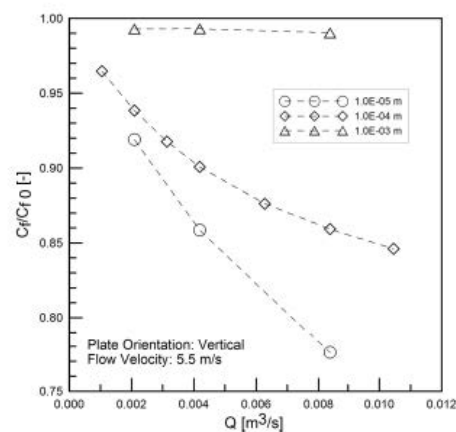
(a) Con velocità del flusso pari a 1.5 m/s.



(b) Con velocità del flusso pari a 2.5 m/s.



(c) Con velocità del flusso pari a 4.0 m/s.



(d) Con velocità del flusso pari a 5.5 m/s.

Figura 17: Grafici della resistenza d'attrito normalizzata, in funzione della portata d'aria e della dimensione media delle particelle, per ogni velocità analizzata.



5 Conclusioni

La simulazione della riduzione di resistenza dovute all'insufflazione di microbolle ha presentato limiti relativi alla scarsa persistenza: devono essere raccolte ulteriori informazioni dettagliate riguardo i meccanismi di interazione tra le microbolle e l'ambiente turbolento in cui queste si vengono a trovare. Tale studio dev'essere fatto innanzitutto mediante osservazioni e analisi dirette del campo. Una maggiore comprensione della fisica del fenomeno permetterà poi di compiere simulazioni più realistiche e precise. Non va dimenticato inoltre che nella valutazione di riduzione di resistenza si deve tenere in considerazione del sistema per la fornitura d'aria e della sua spesa energetica, non del tutto trascurabile, soprattutto in quelle regioni con una più alta contropressione, quali il fondo; ciò ovviamente conduce ad una riduzione del margine di beneficio.

Continuare la ricerca, sperimentale e teorica, è fondamentale affinché sistemi basati sulla riduzione della resistenza all'avanzamento mediante microbolle possano essere applicati alle grandi navi.

Riferimenti bibliografici

- [1] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, sixth edition, 1975.
- [2] Rudin W. *Principi di analisi matematica*. McGraw-Hill, Milano, 1991.
- [3] Orszag S. A. Analytical theories of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 41 (2):363–386, 1970. The Boeing Symposium on Turbulence.
- [4] Peters N. *Turbulent Combustion*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [5] Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 186:123–164, 1895.
- [6] de Moura C. A. e Kubrusly C. S., editors. *The Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Condition*. Birkhäuser, Boston, MA, 2013.
- [7] Xu J., Maxey M. R. e Karniadakis G. E. Numerical simulation of turbulent drag reduction using micro-bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 468:271–281, 2002.
- [8] Ferrante A. e Elgobashi S. On the physical mechanisms of drag reduction in a spatially developing turbulent boundary layer laden with microbubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 503:345–355, 2004.
- [9] Miozzi M., Olivieri A., Jacob B. F. e Campana E. F. Microbubble-laden turbulent boundary layer investigation by feature tracking. In *Proceedings of 14th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 2013.
- [10] Madavan N. K., Deutsch S. e Merkle C. L. Reduction of turbulent skin friction by microbubbles. *Physics of Fluids*, 27(2):356–363, 1984.
- [11] Madavan N. K., Deutsch S. e Merkle C. L. Measurements of local skin friction in a microbubble-modified turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 156:237–256, 1985.